Fiduzialintervalle für den Parameter der Binomialverteilung mit SPSS 6.0 für Windows

Zusammenfassung: Der Beitrag möchte an das in der angewandten Statistik in Deutschland bisher kaum verwendete Fiduzialkonzept von R.A. Fisher erinnern und an einem Beispiel aus der Markt- und Meinungsforschung zeigen, wie man mit der neuen Version 6.0 von SPSS für Windows praktisch fiduziale Konfidenzintervalle hinreichender Genauigkeit für den Parameter der Binomialverteilung bestimmen kann. Er wendet sich an Anwender der Statistik, die diese als Handwerkszeug zur Informationsgewinnung aus empirischen Daten in ihrer jeweiligen Fachdisziplin einsetzen, sowie an Lehrende der Statistik, die SPSS zur Unterstützung und Vertiefung von Lehrinhalten verwenden.

Einleitung

Im gegenwärtigen ‘Superwahljahr’ 1994 hatten Meinungsumfragen Hochkonjunktur. Als Statistiker muß man sich schon manchmal wundern, was aus geringfügigen Veränderungen von etwa 0,5% bis 1% von einer Woche zur nächsten alles herausorakelt wird über den Aufwärts- oder Abwärtstrend von Parteien oder Spitzenpolitikern. Einander widersprechende Aussagen zwischen konkurrierenden Instituten sind keine Seltenheit und haben der ganzen Gilde schon öfter den Ruf der Unglaubwürdigkeit eingebracht.

Für solche Umfragen werden in der Regel etwa 1500 bis 3500 mehr oder weniger repräsentativ ausgewählte Bundesbürger nach Ihren Meinungen, Stimmungen und Wahlabsichten befragt. Das Ziehen einer für das Wahlvolk der Bundesrepublik repräsentativen Stichprobe dieses geringen Umfangs ist dabei das schwierigste Problem. Die hohen Kosten für bundesweite Umfragen zwingen oft zu Kompromissen, die den Wert derartiger Untersuchungen stark beeinträchtigen. Jedoch soll dieses Problem hier nicht im Mittelpunkt der weiteren Betrachtung stehen.

Viele Aussagen ließen sich relativieren oder objektivieren, wenn es sich einbürgern würde, zu den jeweiligen Prozentangaben etwa 95%ige Konfidenzintervalle anzugeben. Das sind Toleranzgrenzen für die Prozentwerte, die den statistischen Charakter der Aussagen jederzeit bekräftigen und auch zeigen, bei welchen Untergruppengrößen inferenzstatistische Aussagen nicht mehr möglich sind.

Streng genommen müßten dies Konfidenzbereiche für den Parametervektor einer Multinomialverteilung sein, etwa bei der berühmten ‘Sonntagsfrage’. Weiter müßte man eigentlich berücksichtigen, daß für viele nicht voneinander unabhängige Fragen Prozentangaben gemacht werden und damit eigentlich eine sogenannte α-Adjustierung erfolgen müßte. Dies hätte zur Folge, daß die Konfidenzintervalle sich insgesamt verbreitern würden. Im Hinblick auf die dominanteren Prognosefehler durch Nichtrepräsentativität (die auch durch kunstvolle Gewichtungen nicht vollständig aus der Welt zu schaffen sind) wollen wir diese methodischen Fehlerquellen hier vernachlässigen.

Im Sinne der explorativen Statistik erörtert dieser Beitrag Möglichkeiten zur Berechnung derartiger Toleranzintervalle für den Parameter einer Binomialverteilung und deren praktische Realisierung mit SPSS für Windows, Version 6.0.

Frequentistische Konfidenzintervalle

Wir betrachten zunächst einige Möglichkeiten, approximative frequentistische Konfidenzintervalle für den Parameter der Binomialverteilung zu konstruieren.

Es sei A ein zufälliges Ereignis, z.B. am Wahlsonntag die ‘Blaue Partei: BP’ zu wählen. Uns interessiert der Prozentsatz der Wähler, die diese Partei wählen werden, also die Wahrscheinlichkeit p für das Eintreten des Ereignisses A

$$P(A) = p.$$

Wir führen eine repräsentative Umfrage mit n erfolgreichen Interviews durch, d.h. wir betrachten eine Folge $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\} = \mathrm{X}_n$ von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsgrößen mit

$$X_i = \begin{cases} 1, & \textit{falls A eingetreten ist} \\ 0, & \textit{sonst}. \end{cases}$$

Somit ist $P(X_i = 1) = p$ und $P(X_i = 0) = 1\text{-}p$ für alle $i = 1,\ldots,n$ und weiter

$$\mathrm{E}(X_i) = p$$

$$\mathrm{var}(X_i) = p(1-p).$$

Die Häufigkeit H des Eintretens von A in der Stichprobe vom Umfang n ergibt sich dann als

$$H = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad .$$

H ist binomialverteilt mit $\mathrm{B}(n,p)$, was heißt, daß

$$P(H = k) = \binom{n}{k} p^k \, (1-p)^{n-k} \quad .$$

Auf der Basis der Stichprobe X_n wollen wir den unbekannten Parameter p (den Anteil der Wähler der ‘BP’ in der Population) schätzen und diese Schätzung mit einem Toleranzintervall

$$I(\mathrm{X}_n) = (\underline{p}, \overline{p})$$

so umgeben, daß für eine gegebene Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha \in (0,1)$ (meist α=0,05) folgendes gilt

$$P_p[I(\mathrm{X}_n) \ni p] \geq 1-\alpha \quad ,$$

wie immer das wahre p auch sein möge. Der unbekannte Wähleranteil p ist dabei fest, aber unbekannt. Wir suchen also ein zufälliges Intervall (die Grenzen und die Breite von I hängen vom Ergebnis der Stichprobe X_n ab) so, daß dieses Intervall bei einer angenommenen häufigen Wiederholung der Befragung in $(1-\alpha)\bullet 100\%$ aller Fälle das tatsächliche p überdeckt.

Bei einer derartigen Konstruktion spricht man von frequentistischen Konfidenzintervallen.

Dieses klassische und allgemein verbreitete Konzept ist insofern kritikwürdig, da man ja die Befragung zu einem bestimmten Zeitpunkt nur einmal durchführt und nur für die konkret geschätzten Prozentwerte Toleranzgrenzen bestimmen möchte, nicht aber für alle denkbaren Ausgänge der Erhebung.

Diesem Ansatz folgend, haben eine Reihe von Autoren frequentistische Konfidenzintervalle für den Parameter der Binomialverteilung konstruiert. Der bekannteste Ansatz geht auf Clopper und Pearson (1934) zurück. Sie konstruierten Intervalle $(\underline{p}_k, \overline{p}_k)$ in Abhängigkeit von n und k so, daß

$$P(H \geq k \mid \underline{p}_k) = \frac{\alpha}{2}$$

$$P(H \leq k \mid \overline{p}_k) = \frac{\alpha}{2}.$$

Für $k = 0$ setzt man sinnvollerweise $\underline{p}_0 = 0$ und für $k = n$ entsprechend $\overline{p}_n = 1$. Aus dem Zusammenhang zwischen kumulativer Binomial- und Betaverteilung (siehe z.B. O. Bunke (1959)) ergibt sich dann für α=0,05

$$\underline{p}_k = IDF.BETA(0.025; k; n-k+1)$$

für $0 < k \leq n$ und

$$\overline{p}_k = IDF.BETA(0.975; k+1; n-k)$$

für $0 \leq k < n$, wobei *IDF.BETA(p; r; s)* die inverse Verteilungsfunktion zur Betaverteilung mit den Gestaltsparametern *r* und *s* darstellt. Diese Funktion ist in SPSS für Windows 6.0 verfügbar (in der hier gewählten Schreibweise), und somit können die Clopper/Pearson-Intervalle für jedes n und k berechnet werden.

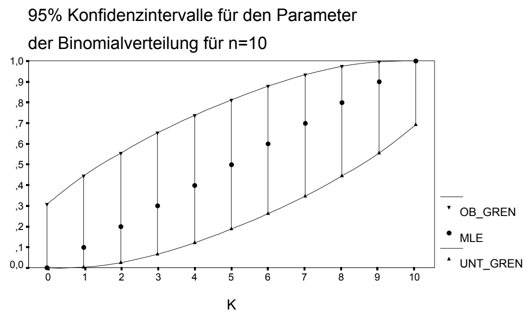
Im folgenden ist die Syntax aus SPSS angegeben, mit der diese Intervalle berechnet werden können:

```
*****Clopper/Pearson*********.
compute n = 10.
EXECUTE .
COMPUTE k = $casenum - 1 .
COMPUTE n_k = n-$casenum + 1 .
EXECUTE .
COMPUTE mle = k / n .
EXECUTE .
If (k = 0) unt_gren = 0 .
If (k > 0 & k <= n) unt_gren = IDF.BETA(0.025,k,n_k+1) .
EXECUTE .
IF (k >= 0 & k < n) ob_gren = IDF.BETA(0.975,k+1,n_k) .
IF (k = n) ob_gren = 1 .
EXECUTE .
GRAPH
  /LINE(DROP)=VALUE( unt_gren mle ob_gren ) BY k
  /TITLE= '95% Konfidenzintervalle für den Parameter' 'de
 ' Binomialverteilung'.
```

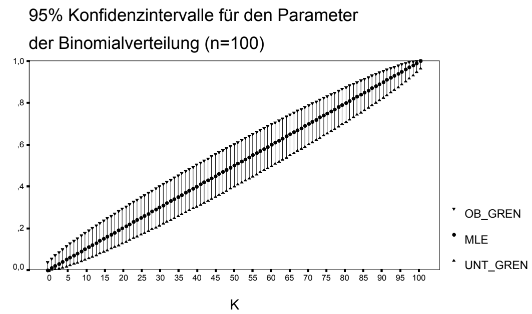
In SPSS öffnet man ein neues Arbeitsblatt und schreibt in die erste Spalte des (n+1)-ten Falles eine beliebige Zahl. Damit wird eine Datei mit (n+1) Fällen angelegt. Danach wendet man die obige Syntax mit dem entsprechend gewähltem n an.

Wir haben hier einmal die Clopper/Pearson-Intervalle für n=10 und α=0,05 berechnet. Gleichzeitig verwenden wir eine Drop-Line-Chart, um das Ergebnis zu illustrieren. Die 'MLE' ist hier die Maximum-Likelihood-Schätzung, die üblicherweise zur Anteilsschätzung verwendet wird:

k	unt_gren	MLE	ob_gren
0	0	0	0,3085
1	0,0025	0,1	0,445
2	0,0252	0,2	0,5561
3	0,0667	0,3	0,6525
4	0,1216	0,4	0,7376
5	0,1871	0,5	0,8129
6	0,2624	0,6	0,8784
7	0,3475	0,7	0,9333
8	0,4439	0,8	0,9748
9	0,555	0,9	0,9975
10	0,6915	1	1



Für n=100 erhalten wir folgende Darstellung:



Damit läßt sich auch sehr schön für Lehrzwecke der Zusammenhang von Stichprobenumfang und Schätzgenauigkeit illustrieren.

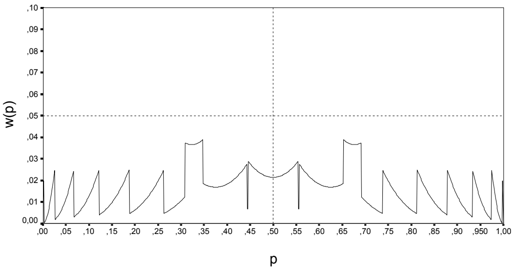
Nun ist seit langem bekannt, daß die Clopper-Pearson-Intervalle die zugelassene Irrtumswahrscheinlichkeit bei weitem nicht ausschöpfen, was zu unnötig langen Intervallen führt. Olaf Bunke hat 1959 den Begriff der Fehlerfunktion w(p) für Konfidenzintervalle eingeführt als

$$w(p) = P\{p \notin (\underline{p}_H, \overline{p}_H) \mid p\}.$$

Mit dieser Funktion läßt sich die Güte von Konfidenzintervallsystemen beurteilen. Auch hierbei wird das frequentistische Wahrscheinlichkeitskonzept zugrunde gelegt. Die früher recht aufwendigen Berechnungen zur Erzeugung dieser Funktion lassen sich für ein gegebenes Intervallsystem in SPSS gut bewältigen. Für die hier betrachteten Intervalle von Clopper und

Pearson hat die Fehlerfunktion *w(p)* für *n*=10 die folgende Gestalt:

Fehlerfunktion w(p) für original Clopper/Pearson Konfidenzintervalle
für n=10 in Abhängigkeit vom wahren p (alpha = 0.05)



Man sieht gut, daß diese Intervalle konservativ in der Ausschöpfung der Irrtumswahrscheinlichkeit sind. Die mittlere Irrtumswahrscheinlichkeit ist 0.016, das Maximum liegt bei 0.039.

Deshalb wurden in der Vergangenheit zahlreiche Versuche unternommen, dieses System zu verbessern. So wird in dem Statistikprogramm 'StatXact' von Cytel (1992) für *k*=0 die obere Konfidenzgrenze folgendermaßen bestimmt:

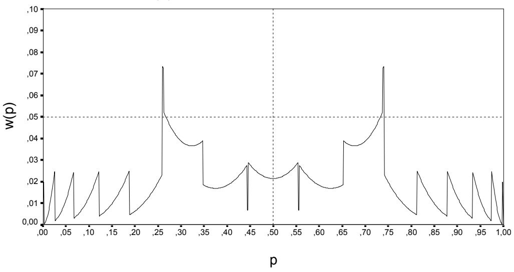
$$P(H = 0 \mid \overline{p}_0) = \alpha$$

und entsprechend die untere Grenze für *k=n* zu

$$P(H = n \mid \underline{p}_n) = \alpha \ .$$

Am Beispiel *n*=10 kann man schnell zeigen, daß es damit einen kleinen Bereich von *p*-Werten gibt, der die vorgeschriebene Irrtumswahrscheinlichkeit nicht mehr einhält. Mit SPSS berechnen wir wieder die Fehlerfunktion:

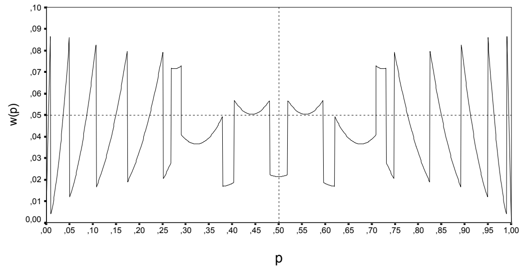
Fehlerfunktion w(p) für StatXact-Konfidenzintervalle
für n=10 in Abhängigkeit vom wahren p (alpha = 0.05)



Bis auf die Werte k=0 und k=10 sind die in StatXact berechneten Intervalle identisch mit denen von Clopper/Pearson.

O. Bunke hat in seiner Arbeit 1959 einige weitere Methoden zur Verbesserung angegeben, u.a. die 'mittleren optimalen Konfidenzintervalle'. Diese halten im Mittel das vorgeschriebene Konfidenzniveau ein. Eine Verletzung des strengen Niveaus ist gestattet, die allerdings per Vorgabe beschränkt ist auf nicht zu große Abweichungen. Diese Intervalle sind zwar im Mittel kürzer als andere, doch kann der Bereich, in dem das Konfidenzniveau nicht eingehalten wird, recht groß werden. Für *n*=10 ergibt sich folgende Fehlerfunktion:

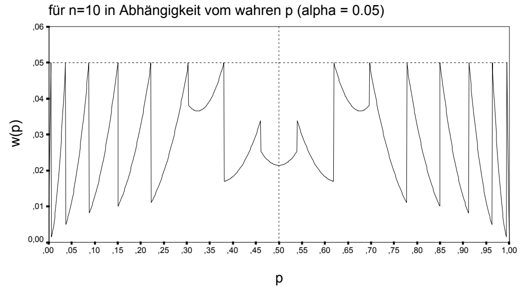
Fehlerfunktion w(p) für Bunkes mittlere Konfidenzintervalle
für n=10 in Abhängigkeit vom wahren p (alpha = 0.05)



Die mittlere Irrtumswahrscheinlichkeit ist 0.042, das Maximum liegt bei 0.086. In 37,8% aller möglichen p-Werte wird die Irrtumswahrscheinlichkeit von α=0.05 überschritten.

Bunke hat auch eine Methode zur Konstruktion von extremalen Konfidenzintervallen angegeben, bei denen die Spitzen der Fehlerfunktion bis an die Irrtumsgrenze heranragen. Diese Methode ist numerisch etwas aufwendiger, ließe sich jedoch auch durch ein Makro in SPSS realisieren. Hier ist die Fehler-funktion für ein System von Konfidenzintervallen, das nach Bunkes Methode konstruiert wurde:

Fehlerfunktion w(p) für extremale Konfidenzintervalle
für n=10 in Abhängigkeit vom wahren p (alpha = 0.05)

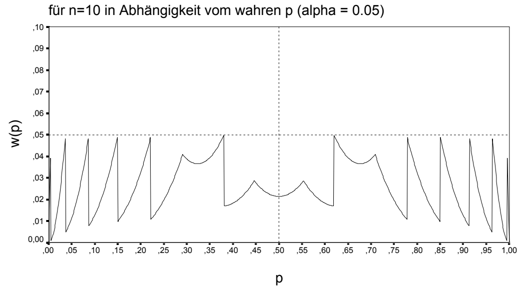


Die mittlere Irrtumswahrscheinlichkeit ist 0.027. Der Wert von 0.05 wird nicht überschritten.

Man kann zeigen, daß die Forderung, die mittlere Länge der Intervalle bei nicht überschrittener Irrtums-wahrscheinlichkeit zu minimieren, keine eindeutige Lösung hat. Deshalb kann ein weiteres Optimalitäts-kriterium herangezogen werden. Hier wurde zusätzlich die Streuung der Intervallängen minimiert.

Peter Neumann hat 1973 ein ähnliches Vorgehen gewählt und als zweites Kriterium die mittlere Irrtumswahrscheinlichkeit minimiert. Die Fehlerfunktion für seine Intervalle hat folgende Gestalt:

Fehlerfunktion w(p) für Neumanns Konfidenzintervalle
für n=10 in Abhängigkeit vom wahren p (alpha = 0.05)



Obwohl er die Irrtumswahrscheinlichkeit nicht an allen Spitzen ausschöpft, ist die mittlere Länge der Intervalle dieselbe wie die bei den extremalen Intervallen. Die mittlere Irrtumswahrscheinlichkeit ist 0.026. Der Wert von 0.05 wird nicht überschritten. Die maximale Länge von Neumanns Intervallen ist etwas länger als die der vorher beschriebenen. Insbesondere hat man hier nicht notwendig bei $k=n/2$ das Intervall größter Länge, was aber sinnvoll erscheint.

Die letzten beiden Fehlerfunktionen legen die Vermutung nahe, daß es möglich sein müßte, durch Verwendung randomisierter Konfidenzintervalle die Zackenkurve etwas zu glätten und vielleicht doch noch eine leichte Verkürzung zu erreichen. Allerdings wird man einen Praktiker kaum dazu bringen können, nach der Ziehung der Stichprobe und der Berechnung der Prozente die Konfidenzintervalle auszuwürfeln.

Fiduzialintervalle

Heute ist das Maximum-Likelihood-Konzept allgemein akzeptiert. Man wählt einen unbekannten Parameter $\hat{p}$ so, daß den beobachteten Werten X_i in der Stichprobe die maximale Plausibilität zukommt, d.h. die Stichprobenfunktion für $\hat{p}$ maximiert wird. Wer das akzeptiert, der sollte auch nichts dagegen haben, Toleranzintervalle aus der Plausibilitätsfunktion (Likelihoodfunktion) abzuleiten.
Im Falle der Binomialverteilung ergibt sich die Likelihoodfunktion zu

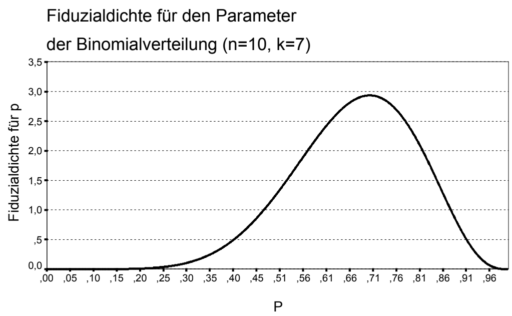
$$P(H = k \mid p) = L(p \mid k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

für $0 \leq p \leq 1$. Das Maximum nimmt $L(p|k)$ für $\hat{p} = k/n$ an. Werte im Umfeld von $\hat{p}$ erscheinen uns auch noch plausibel, wenn die Likelihoodfunktion einem abgeplatteten Bergrücken ähnelt. Es scheint also sinnvoll, eine Entscheidung über ein Toleranzintervall von der Gestalt der Likelihoodfunktion abhängig zu machen. Von der Form her entspricht unser L aber der Dichte einer Betaverteilung. Sie ist nur nicht normiert. Das läßt sich aber nachholen:

$$F(p \mid k, n) = \frac{p^k (1-p)^{n-k}}{\int_0^1 p^k (1-p)^{n-k}\, dp} \quad .$$

Damit haben wir die Fiduzialverteilung für den Parameter der Binomialverteilung konstruiert. Sie ergibt sich objektiv aus der Struktur der Likelihoodfunktion ohne irgendein subjektives Element, die wiederum aus der Logik der Versuchsanordnung resultiert. F ist die Dichte einer Betaverteilung mit den Parametern k+1 und n-k+1. Damit haben wir formal eine Verteilung der Plausibilität über dem Parameterraum konstruiert. Sie drückt unser Wissen nach der Erhebung über den unbekannten Parameter aus und kann auch als a-posteriori-Verteilung zu einer nichtinformativen a-priori-Verteilung in einem Bayesschen Zugang interpretiert werden. Das Fiduzialkonzept wurde in den 30er Jahren von R.A. Fisher entwickelt.

In der folgenden Abbildung ist die Fiduzialdichte für n=10 und k=7 dargestellt.



Ein Fiduzialintervall $(\underline{p}_k, \overline{p}_k)$ ergibt sich nun bei gegebenem $\alpha \in (0,1)$ so, daß

$$\int_{\underline{p}}^{\overline{p}} F(p \mid k, n)\, dp = 1 - \alpha$$

und $(\overline{p} - \underline{p}) \Rightarrow \min$.

In SPSS 6.0 für Windows und auch in Excel 5.0 sind zwar Verteilungsfunktion und inverse Verteilungsfunktion für die Betaverteilung direkt berechenbar, nicht aber die zugehörigen Dichtefunktionen.
Zunächst beschreiben wir eine Lösung in SPSS:
Man erzeugt zunächst in SPSS eine leere Datei, die N=10.001 Fälle und eine Variable mit dem Variablennamen p enthält, indem man in die erste Spalte einer neuen Arbeitsdatei im 10.001ten Fall eine 1 schreibt und diese erste Variable als ‘p’ bezeichnet. Alles weitere übernimmt das folgende Makro:

```
*****************************************
*n=Stichprobenumfang, k=Ereignishäufigkeit*
*alpha=Irrtumswahrscheinlichkeit         *
*****************************************

DEFINE FIDUZ (n=!tokens(1)
             /k=!tokens(1)
             /alpha=!tokens(1)).
SET RESULTS NONE.
SET PRINTBACK NO.
COMPUTE p = ($casenum-1)/10000.
EXECUTE.
FORMAT p (F7.5).
COMPUTE beta = CDF.BETA(p,!k+1,!n-!k+1) .
EXECUTE .
CREATE
  /f_dichte=DIFF(beta 1).
EXECUTE.
COMPUTE f_dichte = f_dichte * 10000.
IF (!k=0 & p=0)f_dichte=!n+1.
IF (!k>0 & p=0)f_dichte=0.
EXECUTE.
CREATE
  /f_dichte=PMA(f_dichte 2).
CREATE
  /f_dichte=LEAD(f_dichte 2).
SORT CASES BY f_dichte (D) .
CREATE
  /cum_sum=CSUM(f_dichte).
COMPUTE cum_sum = cum_sum/10000.
```

```
EXECUTE .
USE ALL.
COMPUTE
 filter_$=(lag(cum_sum)<=(1-!alpha)
 |$casenum=1).
FILTER BY filter_$.
EXECUTE .
VARIABLE LABEL p '(Min=unt.Grenze,
 Max=ob.Grenze)'.
SET RESULTS=listing.
DESCRIPTIVES VARIABLES=p /STATISTICS=MIN MAX.
SORT CASES BY p (A) .
EXECUTE .
USE ALL.
COMPUTE
 filter=(MOD($casenum,5)= 1).
FILTER BY filter.
VARIABLE LABEL p ''.
VARIABLE LABEL f_dichte 'Fiduzialdichte für
p'.
FORMAT p (F4.2).
TSPLOT VARIABLES= f_dichte
  /ID= p
  /NOLOG
  /FORMAT NOFILL NOREFERENCE
  /MARK filter_$.
!ENDDEFINE.
```

Das Makro wird durch die folgende Zeile aufgerufen, in der man den Stichprobenumfang *n*, die Trefferhäufigkeit *k* und die Irrtumswahrscheinlichkeit α spezifizieren muß:

```
fiduz n=10 k=7 alpha=0.05.
```

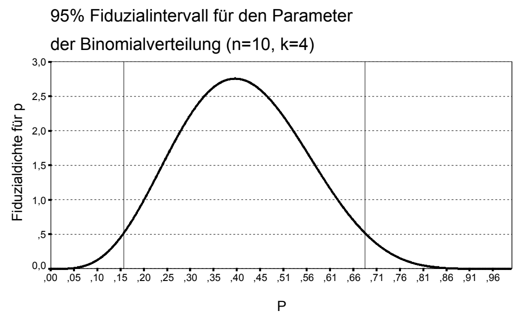
Das Makro berechnet zunächst zu gegebenem *n* und *k* die kumulative Verteilungsfunktion zur Betaverteilung. Diese wird dann numerisch differenziert, was näherungsweise die Fiduzialdichte liefert. Hierbei sind die seit Version 6.0 verfügbaren Transformationen für Zeitreihen sehr nützlich. Die Dichte wird dann in absteigender Reihenfolge ihrer Werte sortiert und anschließend - beginnend beim Modalwert - die kumulative Summe gebildet. Nachdem die kumulative Summe den Wert von 1-α das erste Mal überschritten hat, wird die Dichte gestutzt. Die gesuchten Fiduzialgrenzen findet man als Minimum und Maximum über alle p der gestutzten Fiduzialdichte. Auf diese Weise konstruierte Intervalle werden auch als H(igh)P(osterior)D(ensity)-Intervalle bezeichnet, da sie bei gegebenem Konfidenzniveau 1-α die kürzesten sind, die eine Fläche von 1-α unter der Fiduzialdichte einschließen. Außer für $k=n/2$ liegen sie unsymmetrisch um die Maximum-Likelihood-Schätzung *k/n.*

Der letzte Teil des Makros gibt das Ergebnis und eine Grafik der Fiduzialdichte mit zugehörigem Fiduzialintervall aus:

```
Number of valid observations (listwise) =      5232,00

                                     Valid
Variable   Minimum   Maximum          N  Label

P          ,15860    ,68170    5232  (Min=unt.Grenze, Max=ob.Grenze)
```



Die numerische Ausgabe läßt sich mit Tables von SPSS noch verschönern. Darauf wurde hier verzichtet, um den Rahmen des Basis-Moduls nicht zu verlassen.

Eine alternative Methode zur Bestimmung fiduzialer HPD-Intervalle bietet sich in Excel 5.0 an. Unter Zuhilfenahme des Solvers wird folgendes Minimumproblem gelöst:

$$\overline{p} - \underline{p} \Rightarrow \min$$

unter den Nebenbedingungen:

$$BETAVERT(\overline{p}, k+1, n-k+1)$$
$$- BETAVERT(\underline{p}, k+1, n-k+1) \geq 1 - \alpha$$

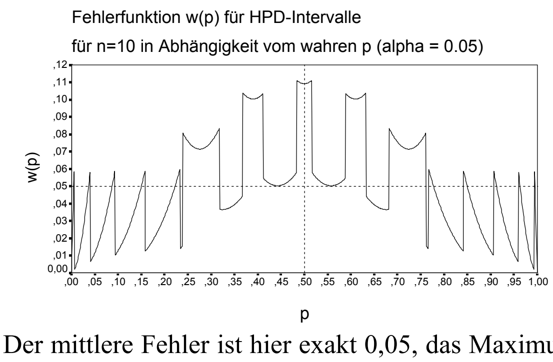
$$\underline{p} \geq 0, \quad \overline{p} \leq 1$$

$$0 \leq \overline{p} - \underline{p} \leq 1 .$$

Als Anfangswerte für die Konfidenzgrenzen kann man die von Clopper und Pearson verwenden, die man in Excel direkt ausrechnen kann.

Auch diese Methode läuft fehlerfrei, dauert aber aufgrund der höheren Genauigkeit etwas länger.

Obwohl die Fiduzialintervalle aus einem anderen Grundprinzip abgeleitet wurden, geben wir hier auch die klassische Fehlerfunktion mit an:



Der mittlere Fehler ist hier exakt 0,05, das Maximum 0,111. In 48,5% aller p-Werte wird die klassische Irrtumswahrscheinlichkeit nicht eingehalten. Das ist auch nicht anders zu erwarten, da dieses Intervallsystem anderen Konstruktionsprinzipien folgt.

Andererseits zeigt das aber, daß die strengen Forderungen der traditionellen Fehlerfunktion offenbar etwas über das Ziel hinausschießen, denn die HPD-Intervalle erscheinen durchaus plausibel. Sie liefern eine Absicherung für den tatsächlich beobachteten Prozentwert und nicht für alle denkbaren Realisierungen der Stichprobe bei häufiger Wiederholung eines Experiments.

Ein Beispiel aus der Meinungsforschung

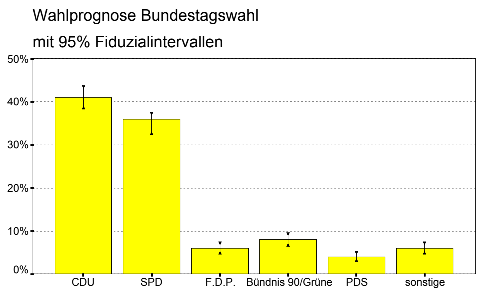
Wir betrachten als Beispiel eine Wahlprognose, die eine Woche vor der Bundestagswahl veröffentlicht wurde. Auf die Sonntagsfrage: „Wen würden Sie wählen, wenn am kommenden Sonntag Bundestagswahl wäre?“ haben 1500 Personen wie folgt geantwortet:

Partei	*Anzahl*	*Prognose*
CDU/CSU	615	41%
SPD	525	35%
FDP	90	6%
B90/Grüne	120	8%
PDS	60	4%
Andere	90	6%
Gesamt:	1500	100%

Hierfür berechnen wir jetzt die Konfidenzintervalle nach Clopper und Pearson und die Fiduzialintervalle:

		Clopper/Pearson		*Fiduzial*	
Partei	*Prognose*	*unt.Grenze*	*ob.Grenze*	*unt.Grenze*	*ob.Grenze*
CDU/CSU	41	37,3	43,2	38,5	43,5
SPD	35%	31,4	37,1	32,6	37,4
FDP	6%	4,3%	7,1	4,9%	7,3%
B90/Grüne	8%	6,1	9,3%	6,7%	9,4%
PDS	4%	2,7%	4,9%	3,1	5,1
Andere	6%	4,3%	7,1	4,9%	7,3%
Gesamt:	100	**mittl.Diff.:**	3,8%	**mittl.Diff.:**	3,2%

Die folgende Grafik wurde auch mit SPSS erstellt und zeigt realistischer das Ergebnis einer Meinungsumfrage mit den Ungenauigkeiten, die einer solchen Prognose immer anhaften.



Im folgenden sind die verwendeten Intervalle tabellarisch wiedergegeben:

		Clopper/Pearson (orig.)		*Bunkes mittl.Interv.*		*Neumann*		*extremale CI*		*HPD-Intervalle (n=10)*	
k	*MLS*	*unt.Gr.*	*ob.Gr.*	*unt.Gr.*	*ob.Gr.*	*unt.Gr.*	*ob.Gr.*	*unt.Gr.*	*ob.Gr.*	*unt.Gr.*	*ob.Gr.*
0	0	0,0000	0,3085	0,0000	0,2680	0,0000	0,2910	0,0000	0,3035	0,0000	0,2384
1	0,1	0,0025	0,4450	0,0100	0,4040	0,0050	0,4460	0,0051	0,4600	0,0063	0,3675
2	0,2	0,0252	0,5561	0,0510	0,5190	0,0370	0,5540	0,0368	0,5399	0,0406	0,4837
3	0,3	0,0667	0,6525	0,1080	0,6200	0,0870	0,6190	0,0873	0,6194	0,0934	0,5880
4	0,4	0,1216	0,7376	0,1750	0,7090	0,1500	0,7090	0,1501	0,6964	0,1586	0,6818
5	0,5	0,1871	0,8129	0,2520	0,7480	0,2220	0,7780	0,2224	0,7776	0,2338	0,7662
6	0,6	0,2624	0,8784	0,2910	0,8250	0,2910	0,8500	0,3036	0,8499	0,3182	0,8414
7	0,7	0,3475	0,9333	0,3800	0,8920	0,3810	0,9130	0,3806	0,9127	0,4120	0,9066
8	0,8	0,4439	0,9748	0,4810	0,9490	0,4460	0,9630	0,4601	0,9632	0,5163	0,9594
9	0,9	0,5550	0,9975	0,5960	0,9900	0,5540	0,9950	0,5400	0,9949	0,6325	0,9937
10	1	0,6915	1,0000	0,7320	1,0000	0,7090	1,0000	0,6965	1,0000	0,7616	1,0000

		Differenzen				
k	*MLS*	*C/P-Diff*	*Bunke*	*Neumann*	*EXTR-Diff*	*HPD-Diff*
0	0	0,3085	0,2680	0,2910	0,3035	0,2384
1	0,1	0,4425	0,3940	0,4410	0,4549	0,3612
2	0,2	0,5309	0,4680	0,5170	0,5031	0,4432
3	0,3	0,5857	0,5120	0,5320	0,5321	0,4946
4	0,4	0,6161	0,5340	0,5590	0,5463	0,5232
5	0,5	0,6258	0,4960	0,5560	0,5552	0,5324
6	0,6	0,6161	0,5340	0,5590	0,5463	0,5232
7	0,7	0,5857	0,5120	0,5320	0,5321	0,4946
8	0,8	0,5309	0,4680	0,5170	0,5031	0,4432
9	0,9	0,4425	0,3940	0,4410	0,4549	0,3612
10	1	0,3085	0,2680	0,2910	0,3035	0,2384
Mittlere Länge:		0,5085	0,4407	0,4760	0,4759	0,4230
mittlerer Irrtum:		0,016	0,042	0,026	0,027	0,05

Literatur

[1] Bunke, O.: Neue Konfidenzintervalle für den Parameter der Binomialverteilung. *Wiss. Z. Humboldt-Univ. Berlin, Math-Nat. R.* **IX** 1959/60, 335-363.

[2] Clopper, C.J.; Pearson, E.S.: The use of confidence or fiducial limits illustrated in the case of the binomial. *Biometrics* **26**, 1934, 404-413.

[3] Fisher, R.A.: The fiducial argument in statistical inference. *Annals of Eugenics* **6**, 1935, 391 ff.

[4] Müller, P.H.; Neumann, P.; Storm, R.: Tafeln der mathematischen Statistik. Fachbuchverlag Leipzig, 1973.

[5] StatXact-Turbo, User Manual, Cytel Software Corporation, Cambridge, MA, 1992.

Johannes Gladitz, Statistik-Service, ~~Tel./Fax (030) 281 63 74~~